# Solución de ejercicios del Curso Teoría Cuántica de Campos Video 3

Victor Oncins

8/2/19

En primer lugar vamos a calcular el promedio sobre la función $e^{-ax^2/2}$ de $x$ siendo $a > 0$, dado que si $a < 0$ entonces $I(a)$ no sería convergente

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2/2}}{I(a)} \tag{1}$$

$I(a)$ es una integral que se calcula fácilmente a partir del resultado del vídeo, sustituyendo la variable $a$ del vídeo por $a/2$. Por lo tanto,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2} = \sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{-1/2} \tag{2}$$

Si observamos con detalle, la integral del numerador, vemos que en realidad contiene la derivada de una función exponencial en $x^2$. Los límites de la integral tendientes a infinito provocan que esta función se anulen ambos extremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2/2} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-ax^2/2} = 0 \tag{3}$$

Es decir que

$$\langle x \rangle = 0 \tag{4}$$

Este resultado no debe sorprendernos dado que la función $xe^{-ax^2/2}$ es antisimmética respecto en el eje $x = 0$.

Se propone ahora calcular el promedio sobre la función $e^{-ax^2/2}$ de $x^{2n}$ para todo $n \geq 1$

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2/2}}{I(a)} \tag{5}$$

Si calculamos las derivadas de $I(a)$ tal como se sugiere en el vídeo, derivando ambos lados de la expresión (2) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{-3/2} \tag{6}$$

Si continuamos con las derivadas de orden superior sucesivamente obtenemos:

$$(-1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2/2} = (-1)\frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{-5/2} \tag{7}$$

$$(-1)^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-ax^2/2} = (-1)^2\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{-7/2} \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2/2} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{-n-1/2} \tag{9}$$

En (9) podemos observar de manera explícita $I(a)$ y $\langle x^{2n}\rangle$. Dado que $I(a) > 0$ podemos sustituir dichas expresiones y obtener $\langle x^{2n}\rangle$

$$(-1)^{n-1}\langle x^{2n}\rangle I(a) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2} I(a)\left(\frac{a}{2}\right)^{-n} \tag{10}$$

$$\langle x^{2n}\rangle = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot\frac{1}{a^n} \tag{11}$$